第 35 講　数列(2)

【基礎確認事項】

［1］　和の記号 Σ

□数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ を表すのに，記号 Σ（シグマ）を用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a_k}$ と書く．

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

例　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}$ は初項 1，公比 2，項数 n の等比数列の和より $\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}$ である．すなわち，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=2^n-1$ である．

□また，$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ は

$$\sum_{k=1}^{5}k^2$$

と表すことができるが，他にも $\displaystyle\sum_{k=2}^{6}(k-1)^2$ や $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(5-k)^2$ など様々な表し方がある．

□$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots\cdots+n$ は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和より $\dfrac{n(1+n)}{2}$ である．すなわち $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)}$ である．

Σ については，一般に次の等式が成立する．

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k \qquad \sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad \sum_{k=1}^{n}c=nc}$$

□$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ を求めよう．恒等式　$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ において，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ とすると

$k=1$ のとき　$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$ のとき　$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$k=3$ のとき　$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$

　⋮

$k=n$ のとき　$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

これらを辺々加えると

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+1\cdot n$$

$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$ であることより，

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2=(n+1)^3-(n+1)-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-2-3n\}=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

よって　$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

⇒　**C&U** 1

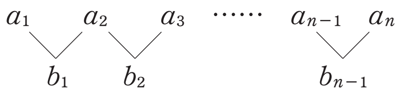
［2］　階差数列

□数列 $\{a_n\}$ に対して，それぞれの項からすぐその前の項を引いた差をとって

$a_{n+1}-a_n=b_n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）

とおくとき，数列 $\{b_n\}$ をもとの数列 $\{a_n\}$ の

階差数列という．



$a_2-a_1=b_1$ より　$a_2=a_1+b_1$

同様に $a_3=a_2+b_2=a_1+b_1+b_2$，$a_4=a_3+b_3=a_1+b_1+b_2+b_3$ であり

$a_n=a_1+(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1})$　である．

よって　$n\geqq 2$ のとき

$\boxed{a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k}$　である．

⇒　**C&U** 2

【CHECK & UP】

1　次の和を求めよ.

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-3)$　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$　　(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k$

2　次の数列の第 n 項を求めよ.

(1)　$\{a_n\}$：1, 3, 6, 10, 15, 21, ……　　(2)　$\{a_n\}$：2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, ……

＜ Note ＞

第 35 講　数列(2)

1 [1]　恒等式　$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを示せ.

[2]　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

(1)　$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \cdots\cdots$

(2)　$1,\ 1+2,\ 1+2+4,\ \cdots\cdots$

(3)　$1\cdot n,\ 2\cdot(n-1),\ 3\cdot(n-2),\ \cdots\cdots,\ (n-1)\cdot 2,\ n\cdot 1$

< Note >

2　次の和を求めよ.

(1)　$1\cdot1+4\cdot2+7\cdot2^2+10\cdot2^3+\cdots\cdots+(3n-2)\cdot2^{n-1}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

< Note >

3　次の数列の一般項を求めよ．

$1,\ 2,\ 4,\ 10,\ 23,\ 46,\ 82,\ 134,\ \cdots\cdots$

＜ Note ＞

第 35 講　数列(2)

(1)　数列 $1\cdot n,\ 3\cdot(n-1),\ 5\cdot(n-2),\ \cdots\cdots,\ (2n-3)\cdot 2,\ (2n-1)\cdot 1$　の和は

$$\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}n(n+1)(\boxed{\text{イ}}\,n+1)$$　である．

(2)　数列 $\frac{1}{2\cdot 5},\ \frac{1}{5\cdot 8},\ \frac{1}{8\cdot 11},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$　の和は

$$\frac{n}{\boxed{\text{ウ}}(\boxed{\text{エ}}\,n+\boxed{\text{オ}})}$$　である．

(3)　数列 $\{a_n\}$：5，7，11，19，35，…… の一般項は　$a_n=\boxed{\text{カ}}^{\,n}+\boxed{\text{キ}}$　である．

< Note >

第35講　数列(2)

【CHECK & UP】

1 (1) $\sum_{k=1}^{n}(4k-3)=4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}3$

$=4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n=2n^2-n=\boldsymbol{n(2n-1)}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{3}{6}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{2^{n+1}-2}$

> 公式を使ったシグマによる和の計算である．
> (1)においては，慣れたら1行のような「複数のシグマに分ける」必要はない．また，最後の答えを必ずしも因数分解する必要はないが，この先にさらに問題が続く場合には必要となることもあるので選択肢には入れておきたい．また，1次式の数列，すなわち「等差数列」の和より，等差数列の和の公式を使っても和を求めることができる．
> (2)は平方数のシグマの公式を利用している．共通因数でくくりながら最後の答えを導いた．その際，さらに6で「通分」していることにも注目しておこう．
> (3)は「等比数列」の初項から第n項までの和である．よって等比数列の公式に入れることができる．a^nの形をしている数列の和はこのように等比数列の和の公式を用いるとよい．初項は$k=1$のときの項であることは言うまでもない．

2 (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$\{b_n\}$ は 2，3，4，5，6，……　であり，その一般項は

$b_n=2+(n-1)\cdot1=n+1$ と考えられる．

よって $n\geqq2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=1+\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)$

$=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n+1)$

これは $n=1$ のときも成り立つ．したがって　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}n(n+1)}$

> 与えられた数列の規則がすぐにわからないときは，このように階差数列を考えることは1つの方法である．
> 実際にはこのように数列の項が羅列して与えられることは少ない．今回は階差数列を通じて数列の一般項を作ること，そしてその和をもとの数列の初項に加えていくことでもとの数列の一般項にたどり着くこと，などを理解してほしい．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$\{b_n\}$ は 1，2，4，8，16，32，…… であり，その一般項は

$b_n=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$ と考えられる．

よって $n\geqq2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=2+\frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$=2^{n-1}+1$

これは $n=1$ のときも成り立つ．したがって　$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}+1}$

> (1)は階差数列が「等差数列」であり，(2)は階差数列が「等比数列」である．
> 1でも触れたが，等差数列には和の公式があるが，使わなくともシグマの公式で計算できる(使う公式はもともと等差数列の和の公式から導くことができるから当然であるが)．等比数列においては，等比数列の和の公式を使う必要がある．したがって，「初項」「公比」「項数」を見誤らないようにしたい．

第35講　数列(2)

1 [1]　恒等式　$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを示せ．

$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$　より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)$

$$(\text{左辺})=(2^4-1^4)+(3^4-2^4)+(4^4-3^4)+\cdots\cdots+\{(n+1)^4-n^4\}=(n+1)^4-1$$

$$(\text{右辺})=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n \quad \text{より}$$

$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)$$

$$=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}=n^2(n+1)^2$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

1 [2]　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ．

(1)　1，1+2，1+2+3，……

(2)　1，1+2，1+2+4，……

(3)　$1\cdot n$，$2\cdot(n-1)$，$3\cdot(n-2)$，……，$(n-1)\cdot 2$，$n\cdot 1$

(1)　この数列の第 n 項は　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

よって求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$$

(2)　この数列の第 n 項は　$1+2+4+\cdots\cdots+2^{n-1}=\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

よって求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2}$$

(3)　この数列の第 k 項は　$k(n-k+1)=-k^2+(n+1)k$

よって求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$$

2 次の和を求めよ．

(1) $1\cdot1+4\cdot2+7\cdot2^2+10\cdot2^3+\cdots\cdots+(3n-2)\cdot2^{n-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

(1) $S_n=1\cdot1+4\cdot2+7\cdot2^2+10\cdot2^3+\cdots\cdots+(3n-2)\cdot2^{n-1}$　とおくと

$2S_n=1\cdot2+4\cdot2^2+7\cdot2^3+\cdots\cdots+(3n-5)\cdot2^{n-1}+(3n-2)\cdot2^n$

$S_n-2S_n=1\cdot1+3\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots+3\cdot2^{n-1}-(3n-2)\cdot2^n$

$$=1+\frac{6(2^{n-1}-1)}{2-1}-(3n-2)\cdot2^n=1+3\cdot2^n-6-(3n-2)\cdot2^n$$

$-S_n=(-3n+5)\cdot2^n-5$　　よって求める和は　$S_n=\boldsymbol{(3n-5)\cdot2^n+5}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}=\boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}$$

3　次の数列の一般項を求めよ．

1，2，4，10，23，46，82，134，……

$\{a_n\}$：1，2，4，10，23，46，82，134，……　とおくと

数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は　1，2，6，13，23，……

さらに数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ は　1，4，7，10，……

数列 $\{c_n\}$ は等差数列より　$c_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)=1+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)=\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{2}n+3$$

これは $n=1$ のときも成立する．

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2-7k+6)$$

$$=1+\frac{1}{2}\left\{3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-7\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(n^3-5n^2+10n-4)$$　これは $n=1$ のときも成立する．

よって　求める数列の一般項は　$\boldsymbol{\frac{1}{2}(n^3-5n^2+10n-4)}$

第35講　数列(2)

(1)　数列 $1\cdot n,\ 3\cdot(n-1),\ 5\cdot(n-2),\ \cdots\cdots,\ (2n-3)\cdot 2,\ (2n-1)\cdot 1$　の和は

$$\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}n(n+1)(\boxed{\text{イ}}\,n+1)$$　である．

(2)　数列 $\frac{1}{2\cdot 5},\ \frac{1}{5\cdot 8},\ \frac{1}{8\cdot 11},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$　の和は

$$\frac{n}{\boxed{\text{ウ}}(\boxed{\text{エ}}\,n+\boxed{\text{オ}})}$$　である．

(3)　数列 $\{a_n\}$：5，7，11，19，35，…… の一般項は　$a_n=\boxed{\text{カ}}^n+\boxed{\text{キ}}$　である．

(1)　この数列の第 k 項を a_k，求める和を S_n とすると，

$$a_k=(2k-1)(n+(k-1)\cdot(-1))=(2k-1)\{-k+(n+1)\}$$
$$=-2k^2+(2n+3)k-(n+1)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+3)k-(n+1)\}$$
$$=-2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(2n+3)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(n+1)\cdot n$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-2(2n+1)+3(2n+3)-6\}$$
$$=\frac{1}{\mathbf{6}}n(n+1)(\mathbf{2}n+1)$$

(2)　$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$

よって求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3n}{2(3n+2)}=\frac{n}{\mathbf{2}(\mathbf{3}n+\mathbf{2})}$$

(3)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$\{b_n\}$：2，4，8，16，…… より数列 $\{b_n\}$ は初項2，公比2の等比数列である．

よって $b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

したがって $n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3$

この式は $n=1$ のときも成り立つ．　ゆえに $a_n=\mathbf{2}^n+\mathbf{3}$